ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

>>>>**<<<<

SESSION 1974

1° INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA - Les sept questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très lisiblement leur numéro.

>>>>>**<<<<<

I - 1°/ Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi n!\, x)$ converge absolument sur $\mathbb{Q}$. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{Q}$?

2°/ On donne à x la valeur e. La série obtenue est-elle convergente ? Conclusion ?

II - On veut résoudre le système

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 5y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 7y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y + z \end{cases}, \quad \text{ou } X' = AX .$$

a/ Montrer qu'on peut trouver une base V_1, V_2, V_3, où V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de A, V_2 correspondant à la valeur propre double et V_3 est tel que $(A-\lambda I)V_3 = V_2$, λ valeur propre double. (On prendra 1 comme première composante de V_1, V_2 et V_3).

b/ Résoudre le système (1).

III - Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \; ; \; f(0,0) = 0$$

a/ Etudier les dérivées partielles premières de f et leur continuité. L'application f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

b/ L'application f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

IV - Soit E un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$; f un endomorphisme de E tel qu'il existe n vecteurs, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, de E, deux à deux distincts, engendrant E et tels que :

$$\forall i = 0,1,2,\ldots,n-2, \qquad f(a_i) = a_{i+1} \quad , \qquad f(a_{n-1}) = a_0 \quad .$$

1°/ Montrer que $f^n = I$, identité de E, et que $f^m \neq I$ pour tout $m < n$.

2°/ Montrer que a_i n'est pas vecteur propre de f et que (a_i, a_{i+1}) est une base de E. En déduire qu'il existe des bases B de E telles que f soit représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

3°/ Soient B et B' deux bases de E dans lesquelles f est représenté par les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & a' \\ 1 & b' \end{pmatrix}$.

Comparer les coefficients littéraux de M à ceux de M'.
Trouver les deux seules valeurs numériques possibles de a et de a'.

4°/ Montrer que le polynôme caractéristique de f n'admet que des racines simples et que, si ses racines sont réelles, ce sont sont $+1$ et -1.
En déduire que le polynôme caractéristique admet des racines réelles si et seulement si $n = 2$.

V - 1°/ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{-3e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\left(e^{\frac{1}{x}} + 2\right)} \qquad \text{si} \qquad x \neq 0 \quad .$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire, sans intégrer l'équation différentielle

$$(1) \qquad (x-1)^3 y' + \left[f(x)(x-1)^3 - 2\right](y-1) = 0 \quad ,$$

que cette équation possède des solutions définies sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2°/ Intégrer l'équation (1) en distinguant les trois cas :

$$x > 1 \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad x < 0 \quad .$$

Relier ensuite les deux solutions obtenues pour $x < 0$ et $0 < x < 1$.

VI - A est une partie d'un espace métrique, $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A, $\bar{A}$ la fermeture ou l'adhérence de A : $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A et $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

On considère $\overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{\bar{A}}$; puis $\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$, etc.. ; on prend ainsi successivement, à partir de A, l'intérieur de la fermeture et la fermeture de l'intérieur.

Montrer, en les énumérant et en les comparant, qu'on ne peut ainsi former que sept parties distinctes, au plus.

VII - Calculer la matrice inverse de la matrice :

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} j & 0 & j^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 & j^2 & 1 \\ j^2 & 0 & j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail